

PROBLEMA 1

Sei il responsabile del controllo della navigazione della nave indicata in figura 1 con il punto P . Nel sistema di riferimento cartesiano Oxy le posizioni della nave P , misurate negli istanti $t = 0$ e $t = 10$ (il tempo t è misurato in minuti, le coordinate x e y sono espresse in miglia nautiche), sono date dai punti $P_1(14; 13)$ e $P_2(12; 11)$. Negli stessi istanti la posizione di una seconda nave Q è data dai punti $Q_1(12; -2)$ e $Q_2(11; -1)$. Entrambe le navi si muovono in linea retta e con velocità costante, come rappresentato in figura 1 (non in scala).

L'area indicata con ZMP è una «Zona Marittima Pericolosa». Il raggio luminoso di un faro posto nel punto F di coordinate $(0; 1)$ spazza un quarto di un cerchio di raggio 10 miglia (vedi figura 1).

1. Calcola dopo quanto tempo, rispetto all'istante in cui la nave P avvista per la prima volta il faro F , essa raggiunge la minima distanza dal faro, e la misura di tale distanza.

2. Determina la posizione della nave P nell'istante in cui per la prima volta la sua distanza dalla nave Q è pari a 9 miglia.

3. Determina l'istante t nel quale la distanza tra le due navi è minima e calcola il valore di tale distanza.

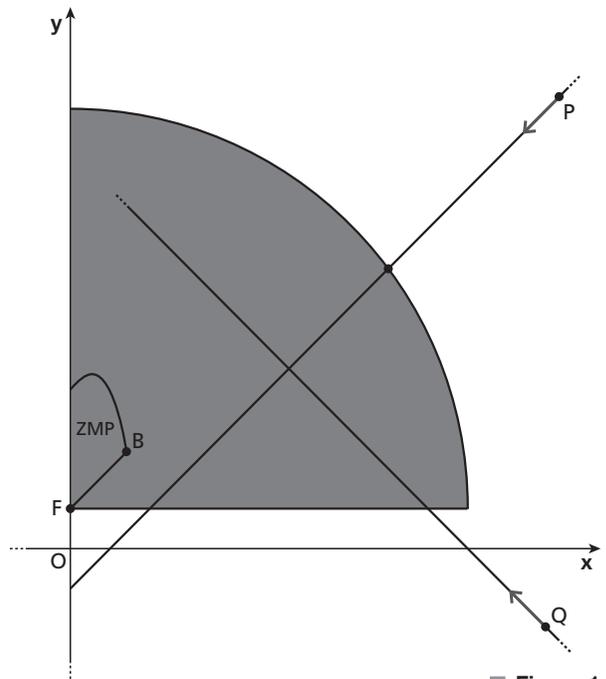
Nel punto $B(X_B; Y_B)$ si trova una boa che segnala l'inizio della ZMP. La delimitazione della ZMP può essere descritta dai grafici delle funzioni f e g che si intersecano nel punto B e sono definite da:

$$f(x) = -x^3 + x + 4, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq x \leq x_B$$

$$g(x) = x + 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq x \leq x_B$$

e dalla retta $x = 0$.

4. Calcola l'area della ZMP.



■ Figura 1

PROBLEMA 1

1. La nave P occupa la posizione $P_1(14; 13)$ all'istante $t = 0$ e la posizione $P_2(12; 11)$ all'istante $t = 10$ minuti.

La nave, in 10 minuti, ha percorso una distanza pari a:

$$d_{1-2} = \sqrt{(14-12)^2 + (13-11)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \text{ miglia nautiche (simbolo M),}$$

e mantiene quindi una velocità costante $v = \frac{2\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{5} \simeq 0,28 \text{ M/min.}$

La traiettoria della nave è individuata dalla retta p passante per i punti P_1 e P_2 ; determiniamo la sua equazione:

$$p: \frac{x-12}{14-12} = \frac{y-11}{13-11} \rightarrow x-12 = y-11 \rightarrow y-x+1 = 0.$$

L'arco di circonferenza di raggio 10 M individuato dal faro posto in $F(0; 1)$ ha equazione:

$$c: (x-0)^2 + (y-1)^2 = 10^2 \rightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = 100 \rightarrow x^2 + y^2 - 2y - 99 = 0,$$

di cui consideriamo solo il tratto con $0 \leq x \leq 10$ e $1 \leq y \leq 11$.

Calcoliamo le coordinate del punto di intersezione A fra la traiettoria della nave e la circonferenza:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 99 = 0 \\ y - x + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + (x-1)^2 - 2(x-1) - 99 = 0 \\ y = x - 1 \end{cases}.$$

Risolviamo la prima equazione, di secondo grado:

$$x^2 + x^2 - 2x + 1 - 2x + 2 - 99 = 0 \rightarrow 2x^2 - 4x - 96 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 48 = 0 \rightarrow$$

$$x = 1 \pm \sqrt{1+48} = 1 \pm 7 \rightarrow x = 8 \text{ (unica soluzione accettabile).}$$

Il punto A ha coordinate $(8; 7)$.

Il punto di minima distanza della traiettoria di P dal faro F è dato dalla proiezione H di F sulla retta p . Le coordinate di H si ottengono intersecando la retta p di coefficiente angolare 1 con la perpendicolare per F a p , che ha coefficiente angolare -1 .

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow H(1; 0).$$

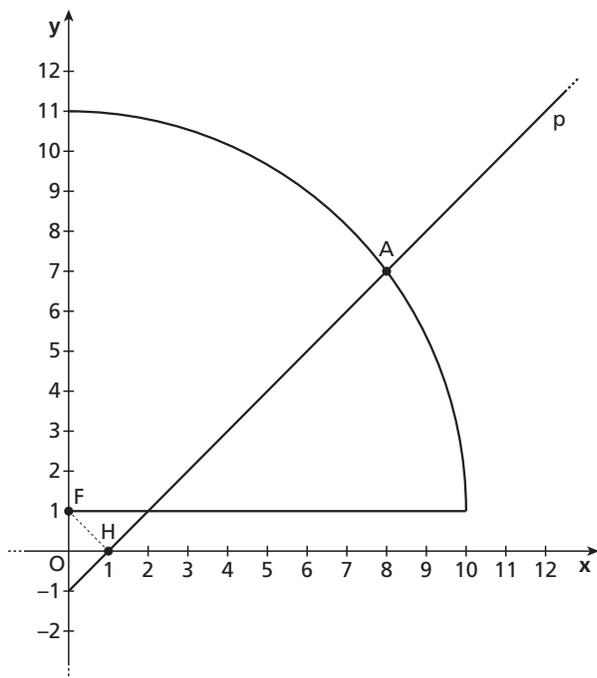
Il tratto AH è lungo:

$$\overline{AH} = \sqrt{(8-1)^2 + (7-0)^2} = \sqrt{7^2 + 7^2} = 7\sqrt{2} \text{ M.}$$

Per percorrere questo tratto AH , la nave P impiega:

$$\frac{\overline{AH}}{v} = \frac{7\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{5}} = 35 \text{ minuti.}$$

Il punto H dista $\sqrt{2} \simeq 1,41$ miglia nautiche da F (poiché FH è l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele OFH di cateti lunghi 1 M).



■ Figura 3

2. Le coordinate della nave P , espresse in miglia nautiche M in funzione del tempo t in minuti, sono date da:

$$P: \begin{cases} x = 14 + \frac{12-14}{10}t \\ y = 13 + \frac{11-13}{10}t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 14 - \frac{1}{5}t \\ y = 13 - \frac{1}{5}t \end{cases}$$

In modo analogo, le coordinate della nave Q sono date da:

$$Q: \begin{cases} x = 12 + \frac{11-12}{10}t \\ y = -2 + \frac{-1+2}{10}t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 12 - \frac{1}{10}t \\ y = -2 + \frac{1}{10}t \end{cases}$$

Stabiliamo quando le navi P e Q distano 9 miglia nautiche:

$$\overline{PQ} = 9 \rightarrow \overline{PQ}^2 = 81 \rightarrow (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 = 81 \rightarrow$$

$$\left(14 - \frac{1}{5}t - 12 + \frac{1}{10}t\right)^2 + \left(13 - \frac{1}{5}t + 2 - \frac{1}{10}t\right)^2 = 81 \rightarrow$$

$$\left(2 - \frac{1}{10}t\right)^2 + \left(15 - \frac{3}{10}t\right)^2 = 81 \rightarrow 4 + \frac{1}{100}t^2 - \frac{4}{10}t + 225 + \frac{9}{100}t^2 - \frac{90}{10}t = 81 \rightarrow$$

$$\frac{10}{100}t^2 - \frac{94}{10}t + 148 = 0 \rightarrow 10t^2 - 940t + 14800 = 0 \rightarrow$$

$$t^2 - 94t + 1480 = 0 \rightarrow$$

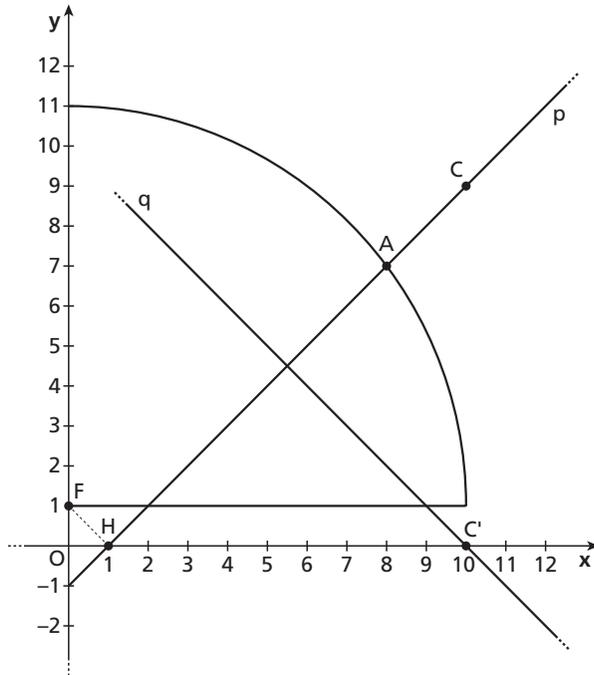
$$t = 47 \pm \sqrt{2209 - 1480} \rightarrow t = 47 \pm 27 \rightarrow t = 20 \text{ minuti} \vee t = 74 \text{ minuti.}$$

Quindi, le navi P e Q si trovano per la prima volta alla distanza di 9 miglia dopo 20 minuti dall'inizio del controllo marittimo.

La posizione della nave P in questo istante è:

$$P: \begin{cases} x = 14 - \frac{1}{5} \cdot 20 \\ y = 13 - \frac{1}{5} \cdot 20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 14 - 4 \\ y = 13 - 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 9 \end{cases} \rightarrow C(10; 9).$$

Nello stesso istante, la nave Q è nella posizione $C'(10; 0)$.



■ Figura 4

3. La distanza, istante per istante, fra i punti $P(14 - \frac{1}{5}t; 13 - \frac{1}{5}t)$ e $Q(12 - \frac{1}{10}t; -2 + \frac{1}{10}t)$ è:

$$d_{PQ}(t) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} = \sqrt{\left(14 - \frac{1}{5}t - 12 + \frac{1}{10}t\right)^2 + \left(13 - \frac{1}{5}t + 2 - \frac{1}{10}t\right)^2} = \sqrt{\left(2 - \frac{1}{10}t\right)^2 + \left(15 - \frac{3}{10}t\right)^2}.$$

Tale distanza è minima quando il radicando assume il valore minimo. Cerchiamo quindi il minimo di:

$$f(t) = [d_{PQ}(t)]^2 = \left(2 - \frac{1}{10}t\right)^2 + \left(15 - \frac{3}{10}t\right)^2 = 4 + \frac{1}{100}t^2 - \frac{2}{5}t + 225 + \frac{9}{100}t^2 - 9t = \frac{1}{10}t^2 - \frac{47}{5}t + 229.$$

Il grafico di $f(t)$ rappresenta una parabola con la concavità rivolta verso l'alto, il cui punto di minimo è rappresentato dal vertice, la cui ascissa è:

$$t_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-\frac{47}{5}}{2 \cdot \frac{1}{10}} = \frac{47}{5} \cdot \frac{10}{2} = 47.$$

Quindi, le due navi si trovano alla minima distanza dopo 47 minuti dall'inizio del controllo marittimo e si trovano alla distanza:

$$\begin{aligned} d_{PQ}(47) &= \sqrt{\left(2 - \frac{1}{10} \cdot 47\right)^2 + \left(15 - \frac{3}{10} \cdot 47\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(-\frac{27}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{729}{100} + \frac{81}{100}} = \\ &= \sqrt{\frac{810}{100}} = \frac{9}{\sqrt{10}} \simeq 2,846 \text{ M.} \end{aligned}$$

4. Calcoliamo l'area della zona marittima pericolosa ZMP mediante l'integrale:

$$A_{ZMP} = \int_0^{x_B} [f(x) - g(x)] dx.$$

Dobbiamo prima determinare l'ascissa x_B del punto di intersezione fra i grafici di $f(x)$ e $g(x)$:

$$\begin{cases} y = -x^3 + x + 4 \\ y = x + 1 \end{cases} \rightarrow -x^3 + x + 4 = x + 1 \rightarrow x^3 = 3 \rightarrow x_B = \sqrt[3]{3} \simeq 1,44.$$

L'area di ZMP è quindi uguale a:

$$\begin{aligned} A_{ZMP} &= \int_0^{\sqrt[3]{3}} (-x^3 + x + 4 - x - 1) dx = \int_0^{\sqrt[3]{3}} (-x^3 + 3) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + 3x \right]_0^{\sqrt[3]{3}} = \\ &= -\frac{(\sqrt[3]{3})^4}{4} + 3 \cdot \sqrt[3]{3} = -\frac{3}{4} \sqrt[3]{3} + 3 \sqrt[3]{3} = \frac{9}{4} \sqrt[3]{3} \simeq 3,245 \text{ M}^2. \end{aligned}$$