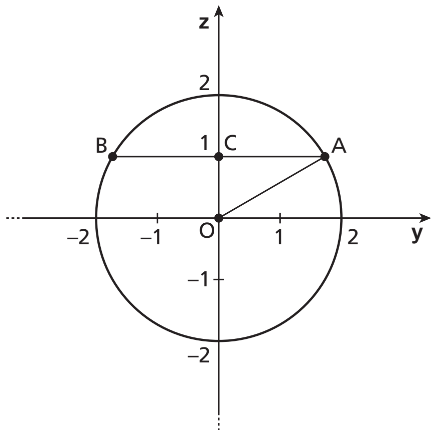
Scuole italiane all'estero • Europa

3 In un riferimento cartesiano $Oxyz$, si verifichi che la circonferenza γ, intersezione della sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e del piano $z = 1$ ha centro in $(0; 0; 1)$ e raggio $\sqrt{3}$. Si immagini che una sorgente di luce puntiforme S sia situata sul semiasse positivo delle z. A quale distanza dal centro della sfera si deve trovare S affinché γ sia il confine tra la zona della sfera che risulta illuminata e quella che resta in ombra?

3 La circonferenza γ è ottenuta dall'intersezione della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, che ha centro in $O(0; 0; 0)$ e raggio 2, con il piano di equazione $z = 1$, che è parallelo al piano Oxy. Il centro di γ si trova pertanto alla quota $z = 1$ e appartiene alla retta passante per O e perpendicolare al piano Oxy; tale retta è l'asse z. Quindi, il centro di γ ha coordinate $C(0; 0; 1)$.
Rappresentiamo nel disegno una sezione della sfera con il piano Oyz; il segmento AB è la proiezione della circonferenza γ sul piano Oyz.

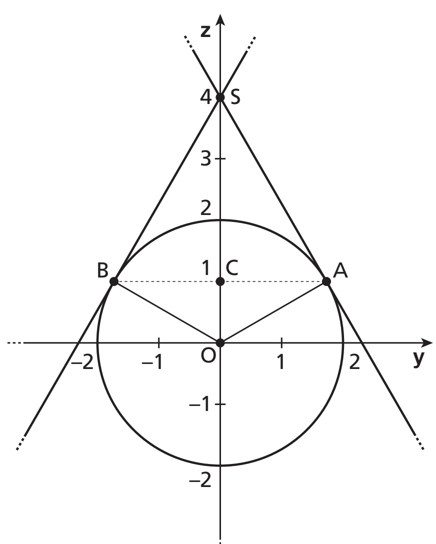


Il raggio CA della circonferenza γ è lungo:

$$\overline{CA} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OC}^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}\,.$$

■ **Figura 7**

Consideriamo ora la sorgente luminosa posta nel punto $S(0; 0; z)$, con $z > 2$. Se la circonferenza γ rappresenta il confine tra la zona della sfera che risulta illuminata e quella che resta in ombra, allora sulla sezione col piano Oyz le rette SA e SB risultano tangenti alla circonferenza di centro O e passante per A e B, ovvero risultano perpendicolari ai raggi OA e OB.



■ **Figura 8**

I triangoli rettangoli OAS e ACS sono simili, quindi hanno i lati corrispondenti in proporzione:

$$\frac{\overline{OS}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} \;\rightarrow\; \overline{OS} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} \cdot \overline{OA} = \frac{2}{1} \cdot 2 = 4.$$

La sorgente S deve quindi avere coordinate $S(0; 0; 4)$, quindi S deve distare 4 dal centro della sfera.