Liceo scientifico e opzione scienze applicate*

10 Scrivere l’equazione della circonferenza C che ha il centro sull’asse y ed è tangente al grafico G_f di $f(x) = x^3 - 3x^2$ nel suo punto di flesso.

* La prova è uguale a quella delle scuole italiane all'estero, Americhe, 2015.

10 Cerchiamo il punto di flesso della funzione $f(x) = x^3 - 3x^2$:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x,$$

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1),$$

con $f''(x) = 0$ per $x = 1$, $f''(x) < 0$ per $x < 1$, $f''(x) > 0$ per $x > 1$.

La funzione presenta quindi un punto F di flesso di coordinate: $F(1; f(1)) = F(1; -2)$.
La retta t tangente al grafico G_f della funzione in tale punto ha equazione:

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x-1) \rightarrow y + 2 = -3(x-1) \rightarrow y = -3x + 1.$$

Il centro della circonferenza cercata ha coordinate $C(0; c)$; inoltre, poiché la circonferenza è tangente a G_f nel punto di flesso F, il vettore CF risulta perpendicolare alla retta t. Imponiamo la condizione di perpendicolarità:

$$m_{CF} = -\frac{1}{m_t} \rightarrow \frac{y_F - y_C}{x_F - x_C} = -\frac{1}{-3} \rightarrow \frac{-2-c}{1-0} = \frac{1}{3} \rightarrow 2 + c = -\frac{1}{3} \rightarrow c = -\frac{7}{3}.$$

La circonferenza ha centro $C\left(0; -\frac{7}{3}\right)$ e passa per $F(1; -2)$; il suo raggio è dunque:

$$r = \overline{CF} = \sqrt{(1-0)^2 + \left(-2 + \frac{7}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

Determiniamo l'equazione della circonferenza:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2 \rightarrow (x-0)^2 + \left(y + \frac{7}{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2 \rightarrow$$

$$x^2 + y^2 + \frac{14}{3}y + \frac{49}{9} = \frac{10}{9} \rightarrow 9x^2 + 9y^2 + 42y + 39 = 0.$$

Pur non essendo richiesto, rappresentiamo graficamente la situazione.
Osserviamo che la derivata prima $f'(x) = 3x(x-2)$ è negativa per $0 < x < 2$, quindi la funzione è decrescente in tale intervallo.

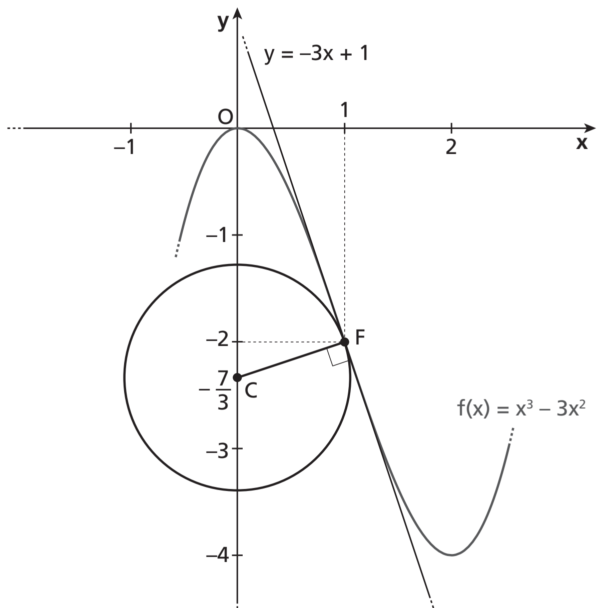

Figura 9